PREMIER JOUR

La Havane , Vendredi 10 Juillet 1987 .

Problème 1 .

Soit l'ensemble $S = \{1,2,.....,n\}$, $(n \geqslant 1)$.

On désigne par $p_n(k)$ le nombre de permutations de S ayant exactement k points fixes.Prouver que :

$$\sum_{k=0}^{n} k \; p_n(k) = n!$$

Remarques :

1.On appelle permutation de S toute bijection de S sur lui-même.

2.Pour toute permutation f de S ,on appelle point fixe de f tout i tel que $f(i) = i$.

Problème 2 .

Soit A B C un triangle dont tous les angles sont aigus.La bissectrice intérieure de l'angle A coupe le côté B C en L et recoupe le cercle circonscrit au triangle en N .On désigne respectivement par K et M les projections orthogonales de L sur les côtés A B et A C .

Prouver que l'aire du quadrilatère A K N M et l'aire du triangle A B C sont égales.

Problème 3 .

Soient n nombres réels $x_1 , x_2 , ..., x_n$ vérifiant :

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$$

et k un entier supérieur ou égal à 2 .

Prouver qu'il existe n entiers non tous nuls $a_1 , a_2 , ..., a_n$ vérifiant :

(1) pour tout entier i, $1 \leq i \leq n$, $|a_i| \leqslant k - 1$

(2) $|a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n| \leqslant \dfrac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$

Temps accordé : 4 h 1/2

Chaque problème vaut 7 points

SECOND JOUR

La Havane, Samedi 11 Juillet 1987 .

Problème 4 .

Prouver qu'il n'existe aucune application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, satisfaisant à : pour tout entier naturel n , $f(f(n)) = n + 1987$.

Problème 5 .

On considère le plan euclidien . Soit n un entier supérieur ou égal à 3 . Montrer qu'il existe n points vérifiant :

(1) trois quelconques de ces points ne sont pas alignés

(2) la distance entre deux quelconques de ces points est irrationnelle

(3) l'aire du triangle déterminé par trois quelconques de ces points est rationnelle .

Problème 6 .

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

Prouver que si $k^2 + k + n$ est un nombre premier pour tout entier k , $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$, alors $k^2 + k + n$ est un nombre premier pour tout entier k , $0 \leq k \leq n - 2$.

Temps accordé : 4 h 1/2

Chaque problème vaut 7 points .